POLITECNICO DI MILANO

Meccanica dei Fluidi

3. Cinematica dei Fluidi

A cura di: Diego Berzi

v1.3

Indice

1 Nozioni fondamentali

1.1 Velocità e accelerazione

Data una particella di fluido che, in un certo istante di tempo t, si trova in un punto individuato dal vettore posizione $\overline{\mathbf{x}} = x_i\hat{\mathbf{i}}_i$ in un sistema di riferimento cartesiano inerziale (assoluto), si definisce velocità della particella il vettore

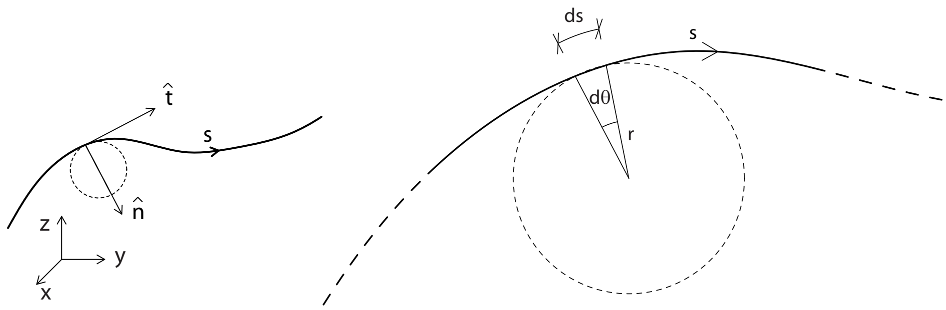
$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{d\overline{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d(x_i\hat{\mathbf{i}}_i)}{dt} = \frac{dx_i}{dt}\hat{\mathbf{i}}_i, \tag{1}$$

di componenti scalari $v_i = dx_i/dt$, dove l'operatore d/dt rappresenta la derivata totale (assoluta o sostanziale) nel tempo. Questo risultato deriva dal fatto che, per un sistema di riferimento inerziale, $d\hat{\mathbf{i}}_i/dt = 0$. Il vettore velocità è una funzione dello spazio e del tempo, $\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}(x, y, z, t)$; costituisce, dunque, un campo vettoriale detto **campo di moto** del fluido.

Il luogo dei punti successivamente occupato da una particolare particella di fluido è detto **traiettoria**. La traiettoria è una linea, lungo la quale possiamo definire un'ascissa curvilinea s. Se definiamo il versore $\hat{\mathbf{t}}$ tangente in ogni punto alla traiettoria, lo spostamento infinitesimo della particella nel sistema di riferimento inerziale può essere scritto come $d\overline{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{t}}ds$ (Fig. 1(a)). Dalla definizione di velocità, otteniamo

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{d\overline{\mathbf{x}}}{dt} = \frac{d\overline{\mathbf{x}}}{ds}\frac{ds}{dt} = v_s\hat{\mathbf{t}}, \tag{2}$$

dove $v_s = ds/dt$ rappresenta la componente scalare della velocità nella direzione tangente alla traiettoria, unica presente.



(a) (b)

Figura 1: (a) traiettoria di una particella; (b) cerchio osculatore.

A partire dalla conoscenza della velocità della particella di fluido, è possibile ricavare il vettore accelerazione nel sistema di riferimento assoluto come

$$\overline{\mathbf{a}} = \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2\overline{\mathbf{x}}}{dt^2} = \frac{d^2x_i}{dt^2}\hat{\mathbf{i}}_i, \tag{3}$$

di componenti scalari $a_i = d^2x_i/dt^2 = dv_i/dt$. Se deriviamo rispetto al tempo la velocità espressa dall'Eq.(2), otteniamo

$$\overline{\mathbf{a}} = \frac{d\overline{\mathbf{v}}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\hat{\mathbf{t}} + v_s\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt}. \tag{4}$$

Si può dimostrare facilmente che la derivata temporale assoluta del versore tangente è normale al versore stesso e diretta verso il centro del cerchio osculatore (tangente alla traiettoria nel punto considerato). Indicando con $\hat{\mathbf{n}}$ il versore associato a tale direzione, risulta

$$\frac{d\hat{\mathbf{t}}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\mathbf{n}}, \tag{5}$$

dove $d\theta$ è la variazione infinitesima dell'angolo al centro del cerchio osculatore (Fig. 1(b)). Dal momento che $rd\theta = ds$, dove r è il raggio del cerchio osculatore, l'Eq.(4) si può scrivere come

$$\overline{\mathbf{a}} = a_s\hat{\mathbf{t}} + a_n\hat{\mathbf{n}}, \tag{6}$$

dove $a_s = d^2s/dt^2 = dv_s/dt$ è l'accelerazione tangenziale, mentre $a_n = v_s^2/r$ è l'accelerazione normale o centripeta.

1.2 Moti relativi

Consideriamo ora il caso generale in cui un sistema di riferimento sia in moto relativo rispetto ad uno assoluto (inerziale). Utilizziamo l'apice per indicare le grandezze associate al sistema di riferimento relativo. La posizione assoluta della particella di fluido può essere ricavata come $\overline{\mathbf{x}} = \overline{\mathbf{x}}_o + \overline{\mathbf{x}}' = x_{oi}\hat{\mathbf{i}}_i + x_i'\hat{\mathbf{i}}_i'$, dove $\overline{\mathbf{x}}_o$ rappresenta la posizione assoluta dell'origine del sistema di riferimento relativo, e $\overline{\mathbf{x}}'$ è la posizione della particella nel sistema di riferimento relativo (Fig. 2).

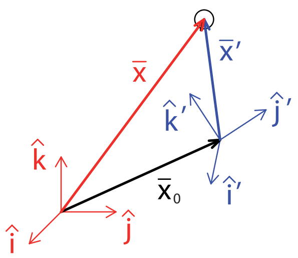


Figura 2: sistema di riferimento assoluto e relativo.

La velocità assoluta della particella si può, allora, scrivere come

$$\overline{\mathbf{v}} = \frac{d\overline{\mathbf{x}}_0}{dt} + \frac{d\overline{\mathbf{x}}'}{dt} = \frac{dx_{oi}}{dt}\hat{\mathbf{i}}_i + \frac{dx_i'}{dt}\hat{\mathbf{i}}_i' + x_i'\frac{d\hat{\mathbf{i}}_i'}{dt}. \tag{7}$$

L'ultimo termine a destra dell'Eq.(7) è presente perchè il sistema di riferimento relativo può essere, in generale, non inerziale. La derivata temporale assoluta del versore si può scrivere, attraverso la relazione di Poisson, come

$$\frac{d\hat{\mathbf{i}}'_i}{dt} = \varpi \times \hat{\mathbf{i}}'_i, \tag{8}$$

dove ϖ è il vettore velocità angolare associato con la rotazione del sistema di riferimento relativo rispetto a quello assoluto. Otteniamo, allora,

$$x'_i \frac{d\hat{\mathbf{i}}'_i}{dt} = \varpi \times \overline{\mathbf{x}}', \tag{9}$$

e l'Eq.(7) diventa

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}_o + \overline{\mathbf{v}}' + \varpi \times \overline{\mathbf{x}}', \tag{10}$$

dove: $\overline{\mathbf{v}}_o = d\overline{\mathbf{x}}_o/dt$ è la velocità assoluta dell'origine del sistema di riferimento relativo; $\overline{\mathbf{v}}' = v'_i\hat{\mathbf{i}}'_i = (dx'_i/dt)\hat{\mathbf{i}}'_i$ è la velocità di trascinamento traslatorio; $\varpi \times \overline{\mathbf{x}}'$ è la velocità di trascinamento rotatorio. L'Eq.(10) permette di esprimere la velocità nel sistema di riferimento assoluto a partire da quella relativa e viceversa.

L'accelerazione si ottiene derivando rispetto al tempo l'Eq.(10):

$$\overline{\mathbf{a}} = \frac{d\overline{\mathbf{v}}_o}{dt} + \frac{d\overline{\mathbf{v}}'}{dt} + \frac{d\varpi}{dt} \times \overline{\mathbf{x}}' + \varpi \times \frac{d\overline{\mathbf{x}}'}{dt}. \tag{11}$$

Il primo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(11) rappresenta l'accelerazione assoluta dell'origine del sistema di riferimento relativo, $\overline{\mathbf{a}}_o = d\overline{\mathbf{v}}_o/dt$. Il secondo termine si può scrivere, usando l'Eq.(8), come

$$\frac{d\overline{\mathbf{v}}'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx'_i}{dt}\hat{\mathbf{i}}'_1\right) = \frac{d^2x'_i}{dt^2}\hat{\mathbf{i}}'_i + \frac{dx'_i}{dt}\frac{d\hat{\mathbf{i}}'_i}{dt} = \overline{\mathbf{a}}' + \varpi \times \overline{\mathbf{v}}', \tag{12}$$

dove $\overline{\mathbf{a}}' = (d^2x'_i/dt^2)\hat{\mathbf{i}}'_i$ è l'accelerazione della particella nel sistema di riferimento relativo. Il terzo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(11) rappresenta il contributo dovuto all'accelerazione angolare $d\varpi/dt$. Inoltre, abbiamo già visto che

$$\frac{d\overline{\mathbf{x}}'}{dt} = \overline{\mathbf{v}}' + \varpi \times \overline{\mathbf{x}}'. \tag{13}$$

L'Eq.(11) si può scrivere, quindi, come

$$\overline{\mathbf{a}} = \overline{\mathbf{a}}_o + \overline{\mathbf{a}}' + 2\varpi \times \overline{\mathbf{v}}' + \frac{d\varpi}{dt} \times \overline{\mathbf{x}}' + \varpi \times (\varpi \times \overline{\mathbf{x}}'), \tag{14}$$

dove: $2\varpi \times \overline{\mathbf{v}}'$ è l'accelerazione di Coriolis; $d\varpi/dt \times \overline{\mathbf{x}}'$ è l'accelerazione tangenziale del vettore $\overline{\mathbf{x}}'$; $\varpi \times (\varpi \times \overline{\mathbf{x}}')$ è l'accelerazione radiale (centripeta) del vettore $\overline{\mathbf{x}}'$.

1.3 Punto di vista Euleriano e Lagrangiano

Finora abbiamo parlato di velocità e accelerazioni della particella di fluido, cioè della velocità e dell'accelerazione viste da un osservatore che è in grado di identificare la particella e di seguirla lungo il suo moto. Il punto di vista di questo osservatore è detto **Lagrangiano**, e la maggior parte delle equazioni della Fisica sono scritte utilizzando tale approccio.

Nel caso della Meccanica dei Fluidi, risulta, spesso, più opportuno mettersi nei panni di un osservatore fisso in un sistema di riferimento inerziale, che vede come le grandezze sono distribuite nello spazio in ogni istante di tempo, senza associarle ad una particolare particella di fluido. Questo secondo punto di vista è detto **Euleriano**.

Matematicamente, il punto di vista Lagrangiano si caratterizza per l'uso della derivata temporale assoluta (o sostanziale). Per passare dal punto di vista Lagrangiano a quello Euleriano si utilizza il concetto di campo, secondo il quale una generica grandezza $\xi = \xi\,(t, x(t), y(t), z(t))$ è funzione del tempo t e delle coordinate spaziali, x, y e z, a loro volta variabili nel tempo. Utilizzando il concetto di derivata di funzione composta, si può scrivere

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{dx}{dt}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{dy}{dt}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{dz}{dt}\frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_x\frac{\partial \xi}{\partial x} + v_y\frac{\partial \xi}{\partial y} + v_z\frac{\partial \xi}{\partial z}, \qquad (15)$$

o, in forma compatta,

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + v_j\frac{\partial \xi}{\partial x_j}, \qquad (16)$$

dove il simbolo ∂ è usato per indicare la derivata parziale. L'Eq.(16) rappresenta la regola di derivazione Euleriana, che permette di passare dalla forma Lagrangiana a quella Euleriana delle equazioni (e viceversa).

Si dimostra facilmente che l'Eq.(1) esprime la velocità in un sistema di riferimento inerziale sia nel caso di punto di vista Lagrangiano che Euleriano. Diversa è, però, la rappresentazione del campo di moto del fluido nei due casi. Il concetto di traiettoria è, infatti, un tipico concetto Lagrangiano, incompatibile col punto di vista Euleriano, dove, per definizione, le particelle di fluido sono indistinguibili. Nel punto di vista Euleriano si utilizzano le **linee di corrente**, definite come le curve tangenti, in ogni punto e istante per istante, ai vettori velocità. La traiettoria rappresenta la storia di una singola particella; la linea di corrente, in un certo istante, fornisce informazioni relative a infinite particelle.

Applichiamo ora la regola di derivazione Euleriana a ciascuna delle componenti dell'accelerazione, così come espressa dall'Eq.(3), e otteniamo

$$\overline{\mathbf{a}} = \frac{dv_i}{dt}\hat{\mathbf{i}}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t}\hat{\mathbf{i}}_i + v_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\hat{\mathbf{i}}_i. \qquad (17)$$

Riconosciamo nell'ultimo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(17) un prodotto misto vettore-tensore (Cap. 1, Par. 1.2): in particolare, tra il vettore

$\overline{\mathbf{v}}$ e il tensore $\nabla\overline{\mathbf{v}}$ (Cap. 1, Par. 1.3), il cui generico elemento posto all'intersezione tra la riga j-esima e la colonna i-esima è $\partial v_i/\partial x_j$. In forma compatta Euleriana, l'accelerazione nel sistema di riferimento inerziale si scrive, dunque, come

$$\overline{\mathbf{a}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla\overline{\mathbf{v}}. \tag{18}$$

Il primo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(18) è l'accelerazione **locale** (variazione della velocità nel tempo in un punto dello spazio fissato). Il secondo termine rappresenta l'accelerazione **convettiva** (dovuta a variazioni di velocità nello spazio a tempo fissato).

1.4 Tipologie di moto

Dalla descrizione del punto di vista Euleriano, e dall'applicazione della regola di derivazione rappresentata dall'Eq.(16), abbiamo capito che, nella Meccanica dei Fluidi, si distinguono le variazioni locali (nel tempo a spazio fissato) della velocità dalle sue variazioni spaziali (nello spazio a tempo fissato). Da questa distinzione discende immediatamente la definizione dei possibili regimi di moto di un fluido.

Si definisce moto **stazionario** o **permanente** il moto per il quale la velocità (e tutte le altre grandezze) risultano indipendenti dal tempo (sebbene possano variare nello spazio). Se il moto è stazionario, **traiettorie e linee di corrente coincidono**. Se la dipendenza dal tempo non può essere trascurata, il moto è detto **non-stazionario** o **vario**.

Si definisce moto **uniforme** il moto per il quale la velocità non varia nello spazio. In senso debole, è detto moto uniforme anche il moto per cui la velocità non varia almeno nella direzione principale del flusso. Il moto **non-uniforme**, in genere, è un moto tridimensionale (**3D**), per sua natura molto difficile da affrontare. La dimensionalità spaziale del moto può, tuttavia, ridursi in presenza di simmetrie. Altre strategie per diminuire la dimensionalità spaziale del problema verranno illustrate in seguito.

2 Analisi delle deformazioni del fluido

2.1 Gradiente di velocità e sua decomposizione

Abbiamo visto (Cap. 1, Par. 2.2) che nella Meccanica dei Fluidi il fluido viene trattato come un mezzo continuo. Questo significa che tutte le grandezze ad esso associate (densità, velocità, sforzi, ecc.) sono considerate variabili continue. Questa proprietà è stata sfruttata, per esempio, per ottenere l'equazione indefinita della Statica (Cap. 2, Par. 1.2). Applicata alla Cinematica, la Meccanica del Continuo ci permette di definire la velocità del fluido in un punto dello spazio che si trova nell'intorno infinitesimo di un altro punto O, in un determinato istante di tempo. Infatti, espandendo in serie rispetto al punto O,

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}_O + dx\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial x} + dy\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial y} + dz\frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial z} = \overline{\mathbf{v}}_O + dx_j\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\hat{\mathbf{i}}_i, \tag{19}$$

dove le derivate si intendono valutate nel punto O e dx, dy e dz rappresentano le componenenti scalari del vettore distanza $d\overline{\mathbf{x}}$ da O (al solito, l'espansione in serie di Taylor è arrestata al primo ordine). L'ultimo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(19) è il prodotto misto tra il vettore $d\overline{\mathbf{x}}$ e il tensore $\nabla\overline{\mathbf{v}}$, per cui

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}_O + d\overline{\mathbf{x}} \cdot \nabla\overline{\mathbf{v}}. \tag{20}$$

Il tensore gradiente di $\overline{\mathbf{v}}$, in forma esplicita, risulta

$$\nabla\overline{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} & \frac{\partial v_y}{\partial z} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Si può sempre pensare di esprimere un tensore come somma di un tensore simmetrico e di uno emisimmetrico. Lavorando sugli elementi del tensore $\nabla\overline{\mathbf{v}}$, infatti,

$$(\nabla\overline{\mathbf{v}})_{ji} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right). \tag{22}$$

Il primo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(22) rappresenta il generico elemento j-i di un tensore, $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$, simmetrico ($D_{ij} = D_{ji}$), che, in forma esplicita, risulta

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix}, \tag{23}$$

chiamato tensore delle velocità di deformazione.

Il secondo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(22) rappresenta il generico elemento j-i di un tensore, $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$, emisimmetrico ($\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$), che, in forma esplicita, risulta

$$\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}, \qquad (24)$$

chiamato tensore delle rotazioni rigide.

L'Eq.(20) diventa, quindi,

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}_O + d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} + d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}. \qquad (25)$$

2.2 Significato fisico del tensore delle velocità di deformazione

Per comprendere il significato fisico dei termini del tensore $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$, e la ragione della sua denominazione, dobbiamo, innanzitutto, distinguere gli elementi diagonali da quelli extra-diagonali (rettangolari). Per semplicità, analizziamo il caso di un moto bidimensionale nel piano x-y. L'estensione al caso 3D è immediata. Se il moto è piano, sia $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ che $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$ si riducono a matrici quadrate 2x2. Prendiamo quattro punti (O-P-Q-R) all'interno del dominio geometrico occupato dal fluido che, all'istante t_0, costituiscano i vertici di un rettangolo di lati dx e dy infinitesimi. Senza perdita di generalità, poniamo l'origine del sistema di riferimento nel punto O e supponiamo che la velocità in O sia nulla, $\overline{\mathbf{v}}_O = (0, 0)$. Le velocità degli altri tre punti si calcolano facilmente per mezzo dell'Eq.(19): $\overline{\mathbf{v}}_P = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}dx, \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right)$; $\overline{\mathbf{v}}_R = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}dy, \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)$; $\overline{\mathbf{v}}_Q = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}dx + \frac{\partial v_x}{\partial y}dy, \frac{\partial v_y}{\partial x}dx + \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)$.

Per mettere in evidenza il ruolo dei termini diagonali di $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$, conviene mettersi nel caso particolare in cui sia i termini rettangolari di $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ che i termini di $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$ sono nulli. Tale condizione è verificata se poniamo $\partial v_x/\partial y = \partial v_y/\partial x = 0$. In questo caso particolare, le velocità dei punti sono: $\overline{\mathbf{v}}_O = (0, 0)$; $\overline{\mathbf{v}}_P = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}dx, 0\right)$; $\overline{\mathbf{v}}_R = \left(0, \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)$; $\overline{\mathbf{v}}_Q = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x}dx, \frac{\partial v_y}{\partial y}dy\right)$. Dopo un intervallo di tempo infinitesimo dt, il rettangolo $OPQR$ si trasforma, dunque, nel rettangolo $OP'Q'R'$ (Fig. 3). I lati si allungano, mentre gli angoli rimangono retti. Gli elementi diagonali di $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ generano, dunque, cambiamenti di superficie (di volume nel caso 3D) senza cambiamenti di forma. Calcoliamo ora l'allungamento subito dai lati del rettangolo paralleli all'asse delle x, che coincide con la lunghezza del segmento $\overline{PP'}$. Esso è pari al prodotto della velocità del

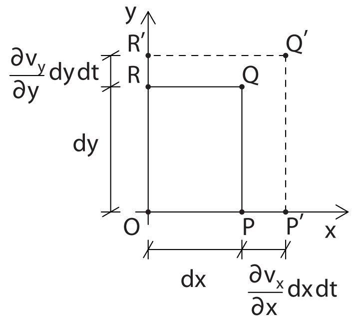


Figura 3: deformazione lineare.

punto P per l'intervallo di tempo dt. Il rapporto tra l'allungamento $\overline{PP'}$ e la lunghezza iniziale del lato $\overline{OP}$ è detto allungamento unitario in direzione x, $d\epsilon_x$, e risulta:

$$d\epsilon_x = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} = \frac{\frac{\partial v_x}{\partial x} dxdt}{dx} = \frac{\partial v_x}{\partial x} dt. \tag{26}$$

Dall'Eq.(26) si ottiene

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{d\epsilon_x}{dt}, \tag{27}$$

cioè che il primo termine sulla diagonale di $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ rappresenta la velocità di deformazione lineare in direzione x. Analogamente, $\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{d\epsilon_y}{dt}$ e, nel caso 3D, $\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{d\epsilon_z}{dt}$. Nel caso 3D, possiamo calcolare la variazione di volume dW che subisce un parallelepipedo di lati infinitesimi dx, dy e dz (e, dunque, volume iniziale $W = dxdydz$) per effetto dei termini diagonali di $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$. Risulta, infatti,

$$dW = \left(dx + \frac{d\epsilon_x}{dt} dxdt\right)\left(dy + \frac{d\epsilon_y}{dt} dydt\right)\left(dz + \frac{d\epsilon_z}{dt} dzdt\right) - dxdydz. \tag{28}$$

Dividendo tutto per W, svolgendo il triplo prodotto di binomi e trascurando gli infinitesimi di ordine superiore a uno, otteniamo

$$\frac{1}{W}\frac{dW}{dt} = \frac{d\epsilon_x}{dt} + \frac{d\epsilon_y}{dt} + \frac{d\epsilon_z}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \nabla \cdot \overline{\mathbf{v}}, \tag{29}$$

cioè che la divergenza di $\overline{\mathbf{v}}$, che coincide con la traccia (somma degli elementi diagonali) del tensore $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$, rappresenta la dilatazione volumetrica (variazione percentuale di volume nell'unità di tempo). I moti in cui la divergenza di $\overline{\mathbf{v}}$ è nulla vengono detti **isocori** perché il volume si conserva (dal greco *iso*, uguale, e *chóra*, volume).

Torniamo ora al caso piano iniziale. Per mettere in evidenza il ruolo dei termini rettangolari di $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$, conviene mettersi nel caso particolare in cui sia i termini diagonali di $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ che i termini di $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$ sono nulli. Tale condizione è verificata se poniamo $\partial v_x/\partial x = \partial v_y/\partial y = 0$ e $\partial v_x/\partial y = \partial v_y/\partial x$. In questo caso particolare, le velocità dei punti sono: $\overline{\mathbf{v}}_O = (0,0)$; $\overline{\mathbf{v}}_P = \left(0, \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right)$; $\overline{\mathbf{v}}_R = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}dy, 0\right)$; $\overline{\mathbf{v}}_Q = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}dy, \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right)$. Dopo un intervallo di tempo infinitesimo dt, il rettangolo $OPQR$ si trasforma, dunque, nel parallelogramma $OP'Q'R'$ (Fig. 4). La lunghezza dei lati rimane inalterata (al primo ordine),

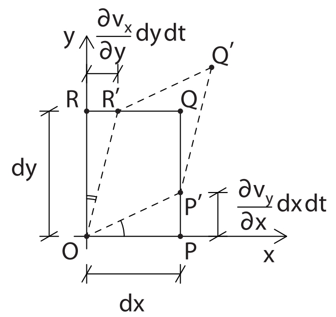


Figura 4: deformazione angolare.

mentre gli angoli si deformano. Gli elementi rettangolari di $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ generano, dunque, cambiamenti di forma senza cambiamenti di superficie (di volume nel caso 3D). Calcoliamo ora la diminuzione $d\gamma_z$ subita dall'angolo retto $R\hat{O}P$ (il pedice z sta a indicare che la deformazione è avvenuta a causa di rotazioni dei lati attorno all'asse z). Dal momento che gli spostamenti sono infinitesimi, gli angoli $P\hat{O}P'$ e $R\hat{O}R'$ si possono confondere con le loro tangenti, per cui risulta:

$$d\gamma_z = -(P\hat{O}P' + R\hat{O}R') = -\frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} - \frac{\overline{RR'}}{\overline{OR}} = -\frac{\frac{\partial v_y}{dx}dxdt}{dx} - \frac{\frac{\partial v_x}{dy}dydt}{dy}. \quad (30)$$

Dall'Eq.(30) si ottiene

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{dx} + \frac{\partial v_x}{dy}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d\gamma_z}{dt}, \quad (31)$$

cioè che l'elemento x-y del tensore $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ rappresenta la metà della velocità di deformazione angolare sul piano perpendicolare a z. Analogamente, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{dx} + \frac{\partial v_x}{dz}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d\gamma_y}{dt}$ e, nel caso 3D, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{dy} + \frac{\partial v_y}{dz}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d\gamma_x}{dt}$.

Complessivamente, il tensore $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ si può rappresentare come

$$\overline{\overline{\mathbf{D}}} = \begin{bmatrix} \frac{d\epsilon_x}{dt} & -\frac{1}{2}\frac{d\gamma_z}{dt} & -\frac{1}{2}\frac{d\gamma_y}{dt} \\ -\frac{1}{2}\frac{d\gamma_z}{dt} & \frac{d\epsilon_y}{dt} & -\frac{1}{2}\frac{d\gamma_x}{dt} \\ -\frac{1}{2}\frac{d\gamma_y}{dt} & -\frac{1}{2}\frac{d\gamma_x}{dt} & \frac{d\epsilon_z}{dt} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

2.3 Significato fisico del tensore delle rotazioni rigide

Ritorniamo al caso piano, con il rettangolo iniziale $OPQR$. Per mettere in evidenza il ruolo dei termini di $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$, conviene mettersi nel caso particolare in cui sia i termini diagonali che rettangolari di $\overline{\overline{\mathbf{D}}}$ sono nulli. Tale condizione è verificata se poniamo $\partial v_x/\partial x = \partial v_y/\partial y = 0$ e $\partial v_y/\partial x = -\partial v_x/\partial y > 0$. In questo caso particolare, le velocità dei punti diventano: $\overline{\mathbf{v}}_O = (0, 0)$; $\overline{\mathbf{v}}_P = \left(0, \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right)$; $\overline{\mathbf{v}}_R = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}dy, 0\right)$; $\overline{\mathbf{v}}_Q = \left(\frac{\partial v_x}{\partial y}dy, \frac{\partial v_y}{\partial x}dx\right)$. Dopo un intervallo di tempo infinitesimo dt il punto R si è spostato nella direzione negativa dell'asse delle ascisse, mentre il punto P si è spostato nella direzione positiva dell'asse delle ordinate. Dal momento che, per spostamenti infinitesimi, gli

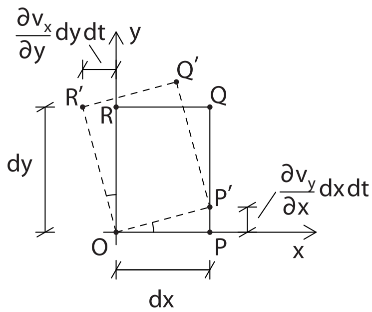


Figura 5: rotazione rigida.

angoli $P\hat{O}P'$ e $R\hat{O}R'$ si confondono con le loro tangenti, risulta

$$P\hat{O}P' = \frac{\overline{PP'}}{\overline{OP}} = \frac{\frac{\partial v_y}{\partial x}dxdt}{dx} = \frac{-\frac{\partial v_x}{\partial y}dydt}{dy} = \frac{\overline{RR'}}{\overline{OR}} = R\hat{O}R'. \tag{33}$$

Il rettangolo $OPQR$ ha, quindi, subito una rotazione rigida attorno all'asse z senza deformarsi (Fig. 5). Dividendo l'angolo di rotazione per l'intervallo di tempo otteniamo la velocità di rotazione angolare ω_z. Dall'Eq.(33) risulta

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) = \omega_z, \tag{34}$$

cioè che l'elemento x-y del tensore $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$ rappresenta la velocità di rotazione angolare attorno all'asse z. Analogamente, nel caso 3D, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) = \omega_y$ e $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) = \omega_x$. Il tensore $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$ si può, quindi, rappresentare come

$$\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

I termini ω_x, ω_y e ω_z possono essere visti come componenti scalari di un vettore, $\overline{\boldsymbol{\omega}}$. Si dimostra facilmente (Cap. 1,Par. 1.3) che

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \frac{1}{2}\nabla \times \overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{2}\overline{\mathbf{w}}, \tag{36}$$

dove $\overline{\mathbf{w}}$, il rotore di $\overline{\mathbf{v}}$, è detto **vorticità**. Con questo, l'Eq.(25) si può anche scrivere (Cap. 1, Par. 1.2) come

$$\overline{\mathbf{v}} = \overline{\mathbf{v}}_O + d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}} + \frac{1}{2}\overline{\mathbf{w}} \times d\overline{\mathbf{x}}. \tag{37}$$

L'Eq.(37) mostra che il campo di moto di un fluido nei dintorni di un punto può essere scomposto in una componente detta di traslazione rigida ($\overline{\mathbf{v}}_O$), in una componente di deformazione ($d\overline{\mathbf{x}} \cdot \overline{\overline{\mathbf{D}}}$) e in una componente di rotazione rigida ($\frac{1}{2}\overline{\mathbf{w}} \times d\overline{\mathbf{x}}$).

Possiamo utilizzare l'analisi appena svolta sul gradiente di velocità per scrivere l'Eq.(18) in maniera alternativa. Infatti, l'accelerazione convettiva nell'Eq.(18) si può esprimere come

$$\begin{aligned}
\overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{v}} \quad = \quad & v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \hat{\mathbf{i}}_i = v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \hat{\mathbf{i}}_i = \\
& v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \hat{\mathbf{i}}_i + v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \hat{\mathbf{i}}_i = \\
& \frac{1}{2} \frac{\partial (v_j v_j)}{\partial x_i} \hat{\mathbf{i}}_i + v_j \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \hat{\mathbf{i}}_i.
\end{aligned} \tag{38}$$

Riconosciamo nell'ultimo termine a destra dell'uguale nell'Eq.(38) il prodotto scalare tra il vettore velocità e il doppio del tensore Ω, per cui

$$\overline{\mathbf{v}} \cdot \nabla \overline{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \nabla (\overline{\mathbf{v}} \cdot \overline{\mathbf{v}}) + \overline{\mathbf{v}} \cdot 2\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}. \tag{39}$$

Ricordando la relazione tra prodotto scalare di un vettore per sé stesso e il suo modulo (Cap. 1, Par. 1.2) e la relazione tra vorticità e tensore $\overline{\overline{\mathbf{\Omega}}}$ utilizzata nell'Eq.(37), l'accelerazione si può infine scrivere come

$$\overline{\mathbf{a}} = \frac{\partial \overline{\mathbf{v}}}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla v^2 + \overline{\mathbf{w}} \times \overline{\mathbf{v}}. \tag{40}$$